Les problèmes de localisation-allocation

Université Paris-Est Créteil
Serge Lhomme

Maître de conférences en Géographie
http://sergelhomme.fr
serge.lhomme@u-pec.fr

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Introduction générale

Définition générale

Ensemble de problèmes cherchant à déterminer les meilleures localisations pour des installations (des ressources) et l'allocation des clients (de la demande) à ces installations.

Cette famille de problèmes est ancienne : Weber (1909) ; Cooper (1963).

Il existe désormais de nombreux problèmes de localisation-allocation et de nombreuses variantes à ces problèmes.

Ce sont des problèmes fondamentaux du géomarketing ou encore de la logistique et dans une moindre mesure de l'aménagement et du transport.

Ces problèmes d'optimisation mathématique sont difficiles à résoudre.

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Les éléments constitutifs

Ces problèmes sont caractérisés par :

- **La localisation potentielle de l'offre** : les ressources, les installations, les points de vente, les centres commerciaux, les entrepôts, les hôpitaux...
- **La localisation de la demande** : les clients, les usagers, les marchandises...
- **Les distances (ou les coûts induits par ces distances) entre l'offre et la demande** : un distancier, un tableau de coûts...
- **Des hypothèses variées** : les clients se déplacent toujours en suivant les itinéraires les plus courts, les clients choisissent toujours de se rendre uniquement à l'installation la plus proche, le coût de l'installation (le loyer) est toujours le même partout...

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Classification des problèmes (des objectifs poursuivis)

Les problèmes à entrée libre : on ne connait pas a priori le nombre d'installations, ce sont les contraintes et les objectifs qui vont définir ce nombre (set covering problem ou problème de couverture).

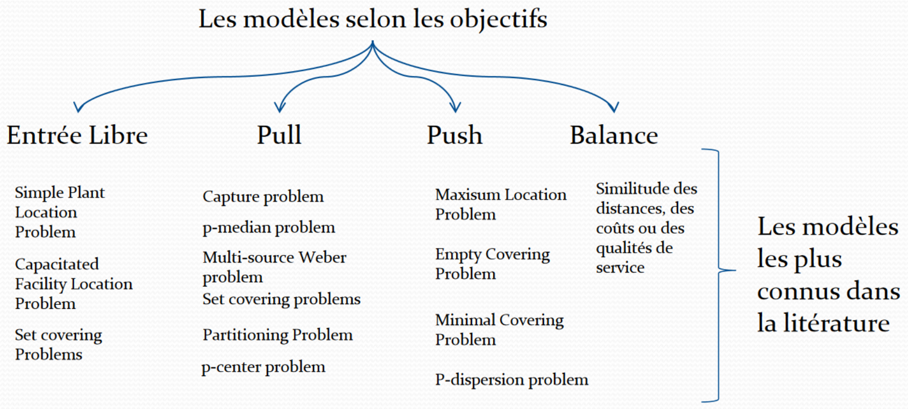
Les problèmes Pull : on cherche là où on va placer les installations de façon à être le plus proche des clients ou le moins éloigné (p-median ou p-centre).

Les problèmes Push : on cherche à éloigner au maximum les installations de là où se situe la demande (p-dispersion).

Les problèmes Balance : on cherche un compromis entre les modèles pull et push, on cherche donc à ne pas être trop près, mais aussi à ne pas être trop loin de la demande.

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Classification des problèmes



Présentation des problèmes de localisation-allocation

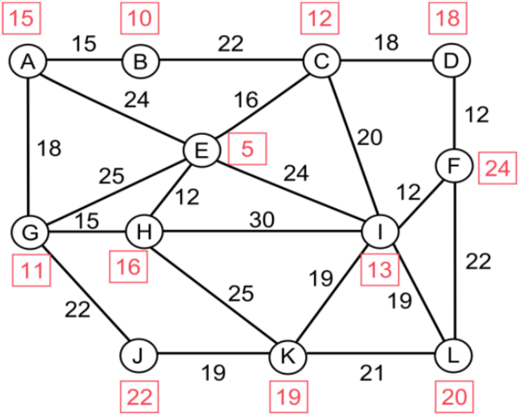
Distancier

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	15	37	55	24	60	18	33	48	40	58	67
B	15	0	22	40	38	52	33	48	42	55	61	61
C	37	22	0	18	16	30	41	28	20	58	39	39
D	55	40	18	0	34	12	59	46	24	62	43	34
E	24	38	16	34	0	36	25	12	24	47	37	43
F	60	52	30	12	36	0	57	42	12	50	31	22
G	18	33	41	59	25	57	0	15	45	22	40	61
H	33	48	28	46	12	42	15	0	30	27	25	46
I	48	42	20	24	24	12	45	30	0	38	19	19
J	40	55	58	62	47	50	22	37	38	0	19	40
K	58	61	39	43	37	31	40	25	19	19	0	21
L	67	61	39	34	43	22	61	46	19	40	21	0

Dans ce cours, les lieux en ligne correspondent aux points de départ, en l'occurrence aux clients. Les colonnes correspondent aux installations possibles considérées ici comme des points d'arrivée. La distance entre un lieu i de certains clients et une installation possible j s'écrit $D_{i,j}$. Le coût associé s'écrit $C_{i,j}$.

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Distancier pondéré



Si ici, la distance séparant A de B est la même que celle séparant B de A (15 km). La distance totale liée aux déplacements de A vers B ($15 \times 15 = 225$) est différent de celui de B vers A ($15 \times 10 = 150$).

Présentation des problèmes de localisation-allocation

Vers une formulation mathématique

Fonction objectif : minimiser les coûts (les distances), maximiser le profit...

Les contraintes : tous les clients doivent être alloués à au moins une installation, le nombre d'installations doit être égal à 3...

Les données : les coûts, les distances, les contraintes (distance inférieure à 3 km)...

Les variables : le client est alloué à telle installation ($X_{ij} = 1$ ou $X_{ij} = 0$), on ouvre telle installation ($Y_j = 1$ ou $Y_j = 0$)...

Résolution du problème p-median

Présentation du problème p-median

En 1909, Weber se questionne sur la meilleure localisation à donner à une industrie compte-tenu de la localisation des matières premières et des marchés (centres d'achats). Il fonde alors sa réflexion sur la minimisation des coûts de transport.

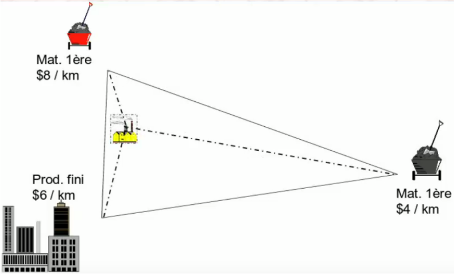
Ce problème donne naissance au problème p-median qui cherche, pour un nombre donné d'installations (p) parmi un choix plus large d'implantations possibles (n), à minimiser la somme totale des distances parcourues par les clients pour se rendre à l'installation qui leur sera la plus proche.

Les clients sont supposés se rendre à l'installation la plus proche en suivant l'itinéraire le plus court.

Très souvent, les lieux possibles d'installation sont les mêmes que les lieux où se trouvent les clients. Ces lieux sont des villes. Le problème s'exprime alors ainsi : étant donné n villes, il faut ouvrir p installations (p magasins) de telle sorte que la somme entre les villes et l'installation la plus proche soit minimum.

Résolution du problème p-median

Présentation du problème p-median



Résolution du problème p-median

Présentation du problème p-median

Le problème p-median est le problème le plus connu des problèmes de localisation-allocation. C'est l'exemple type d'un problème pull (être le plus proche possible de toute la demande).

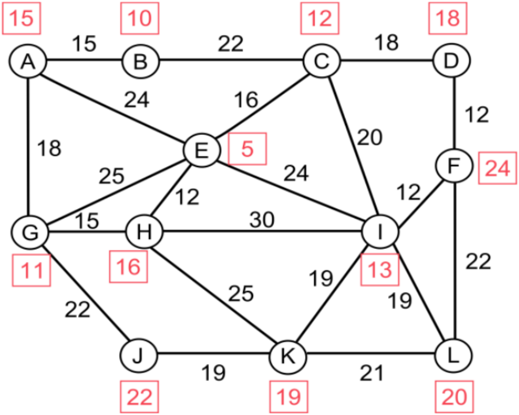
Ce problème sort même du seul domaine des problèmes de localisation-allocation et concerne ceux des mathématiques, de l'informatique...

Ce problème est pertinent pour les entreprises privées qui disposent d'un réseau de points de vente dense et cherchent à satisfaire au mieux leurs clients en se positionnant au plus proche d'eux. Pour ces entreprises, les questions relatives aux limites des zones de chalandise doivent en théorie être secondaires (clients captifs, agglomération ou territoire bien desservi en points de vente...).

Dans les faits, cette situation est plutôt rare et le problème p-median est surtout parfaitement adapté aux questions de localisation d'entrepôts. L'objectif est alors de minimiser les coûts de transport depuis les entrepôts (centre de stockage) vers les clients ou des points de vente.

Résolution du problème p-median

Présentation du problème p-median



Où dois-je implanter mes magasins pour limiter les distances parcourues par mes futurs clients (en rouge) ? En l'occurrence, si je dois ouvrir deux magasins, dois-je choisir les sites A ou B ou B et K ou G et F ou ... ?

Résolution du problème p-median

Résolution exacte et résolution approchée

Les problèmes de localisation-allocation constituent des problèmes difficiles à résoudre d'un point de vue mathématique.

En effet, les combinaisons possibles d'installations à retenir et les affectations correspondantes génèrent très vite un grand nombre de solutions à explorer.

On a affaire à des problèmes d'optimisation combinatoire aussi appelée optimisation discrète.

Ainsi, on distingue deux grands types de résolution à ces problèmes :

- Les résolutions exactes qui sont réservées à un nombre limité d'installations et de clients.
- Les résolutions approchées (heuristiques) qui permettent de trouver des solutions en un temps raisonnable même pour un grand nombre d'installations et de clients.

Résolution du problème p-median

Un exemple d'heuristique : l'algorithme glouton

Trouver une solution optimale dans un ensemble discret et fini est un problème facile en théorie : il suffit d'essayer toutes les solutions et de comparer leur qualité pour identifier la meilleure. Cependant, en pratique, l'énumération de toutes les solutions peut prendre trop de temps.

Pour faire face à ce problème, si un problème se prête à une décomposition étape par étape (itérative), il est possible de choisir à chaque étape la solution qui parait la meilleure sans jamais la remettre en question. C'est le principe de l'algorithme glouton.

Dans la vie de tous les jours, il est très probable que vous utilisiez un algorithme glouton. Ainsi, si vous devez payer 72 centimes en donnant le moins de pièces possibles, vous allez intuitivement chercher une pièce de 50 centimes, puis de 20 centimes, puis de 2 centimes. Vous cherchez donc à chaque étape à vous rapprocher le plus vite possible du résultat visé. Vous optez pour une stratégie gloutonne.

Résolution du problème p-median

L'algorithme glouton et le p-median

1. A partir du distancier initial, on calcule la somme des valeurs de chaque colonne. La valeur la plus faible est alors considérée comme optimale, le site correspondant à cette colonne est donc retenu.

2. Ensuite, on cherche à reproduire le calcul précédent en tenant compte qu'un premier site existe déjà. Pour cela, entre la valeur présente dans une colonne et celle correspondante à la colonne du site retenu, on retient la valeur minimale.

3. Lorsque l'on a fait ça pour toutes les colonnes, on peut calculer la somme des valeurs de chaque colonne. La valeur la plus faible est alors considérée comme optimale, le site correspondant est donc retenu.

4. Ensuite, on reprend l'étape 2 en tenant compte que deux sites existent déjà. Puis, on passe à l'étape 3 pour identifier le troisième site. On s'arrête lorsque l'on a identifié le nombre de sites souhaités, sinon on retourne à l'étape 2 pour continuer.

Résolution du problème p-median

L'algorithme glouton et le p-median

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0
Total	**7816**	**7913**	**5855**	**6457**	**5784**	**5760**	**6936**	**5971**	**4772**	**6886**	**5576**	**6371**

Résolution du problème p-median

L'algorithme glouton et le p-median

	Site potentiel											
Ville	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	720	360	720	270	495	720	600	720	720
B	150	0	220	400	380	420	330	420	420	420	420	420
C	240	240	0	216	192	240	240	240	240	240	240	240
D	432	432	324	0	432	216	432	432	432	432	432	432
E	120	120	80	120	0	120	120	60	120	120	120	120
F	288	288	288	288	288	0	288	288	288	288	288	288
G	198	363	451	495	275	495	0	165	495	242	440	495
H	480	480	448	480	192	480	240	0	480	480	400	480
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	836	836	836	836	836	836	484	814	836	0	418	836
K	361	361	361	361	361	361	361	361	361	361	0	381
L	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	380	0
Total	**3485**	**3725**	**3943**	**4296**	**3696**	**4268**	**3145**	**3655**	**4772**	**3563**	**3858**	**4392**

Résolution du problème p-median

L'algorithme glouton et le p-median

Numéro du point de ventes	Site	Coût total
1	I	4772
2	G	3145
3	F	2641
4	J	2157
5	A	1707

Résolution du problème p-median

Un exemple de résolution exacte : le simplexe

L'algorithme du simplexe est un algorithme permettant de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire. Il a été introduit par George Dantzig à partir de 1947. C'est probablement le premier algorithme permettant de minimiser une fonction sur un ensemble défini par des inégalités.

L'algorithme du simplexe requiert de formuler le problème d'optimisation sous une forme mathématique précise.

Formulation mathématique

Minimiser ou Maximiser : $\sum_j C_j X_j$

En respectant les contraintes : $\sum_j A_{ij} X_j \leq$ ou $\geq B_i \; \forall i$

Résolution du problème p-median

Formulation mathématique

Fonction objectif : Min $\sum_{i}^{N} \sum_{j}^{N} X_{i,j} \times D_{i,j}$

S.C chaque client doit être affecté : $\sum_{j}^{N} X_{i,j} = 1 \ \forall i$

S.C le nombre d'installations doit être égal à P : $\sum_{j}^{N} Y_j = P$

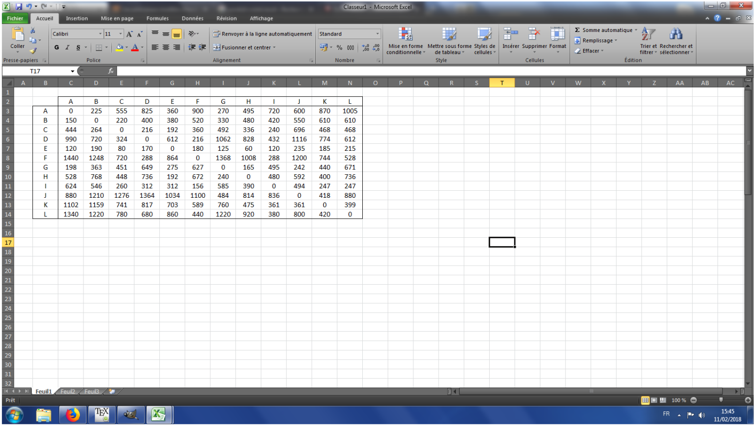
S.C les clients ne sont affectés qu'à un site ouvert : $\sum_{i}^{N} X_{i,j} \leq Y_j \times N \ \forall j$

Les variables $X_{i,j}$ et Y_j sont binaires.

Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

Pour les données, on a simplement besoin d'un distancier et de savoir le nombre d'installations à ouvrir.

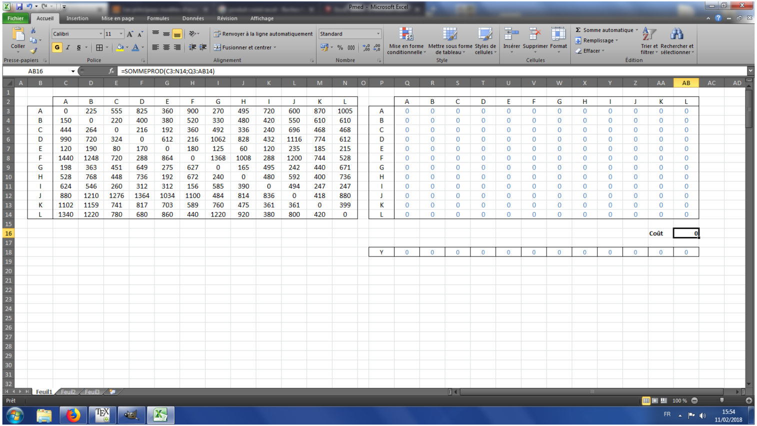


	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

On peut créer un tableau de zéros de même taille que le distancier correspondant aux variables d'affectation $X_{i,j}$ et une ligne de zéros correspondant aux variables d'ouverture Y_j. Il convient aussi de déterminer la fonction de coûts de ces affectations.



AB16 =SOMMEPROD(C3:N14;Q3:AB14)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

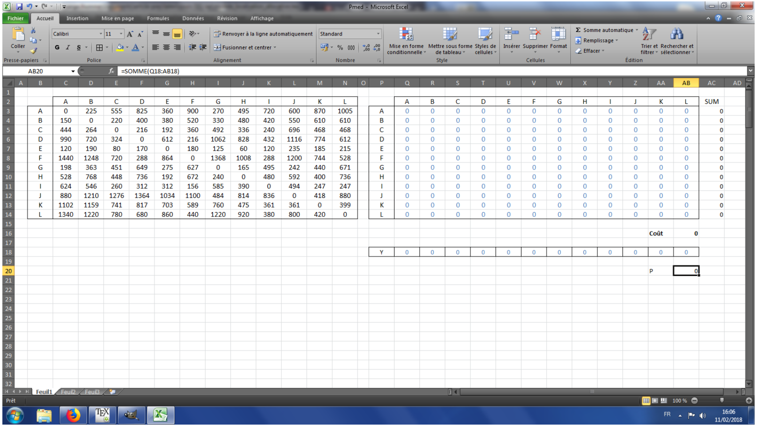
Coût 0

Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

Pour les contraintes, il faut récupérer la somme de la ligne des Y_j pour calculer P. Il faut aussi récupérer les sommes de chaque ligne du tableau pour s'assurer que les clients sont affectés à au moins une installation.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	SUM
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Coût 0

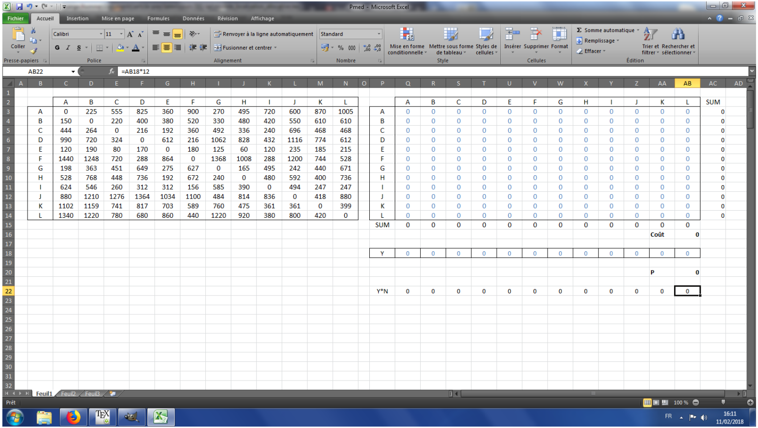
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

P 0

Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

Il convient ensuite de vérifier, en sommant les colonnes du tableau d'affectation et en multipliant ces valeurs par N (ici 12), qu'il n'est pas possible d'ouvrir un site comme on veut.



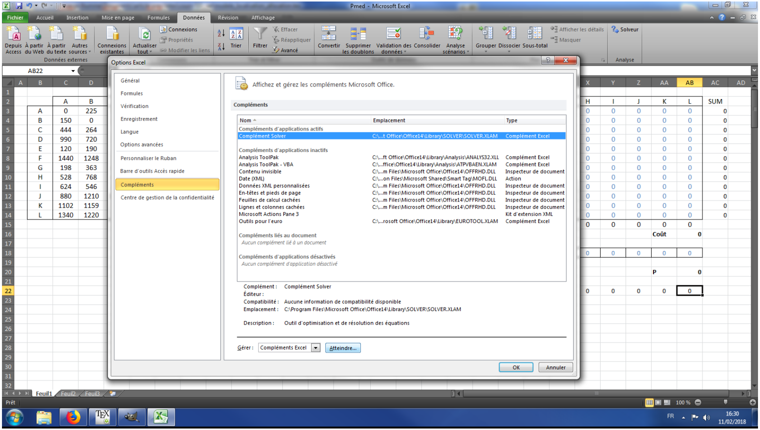
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	SUM
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
D	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
F	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
G	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
SUM	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
											Coût	0	
Y	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
											P	0	
Y*N	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

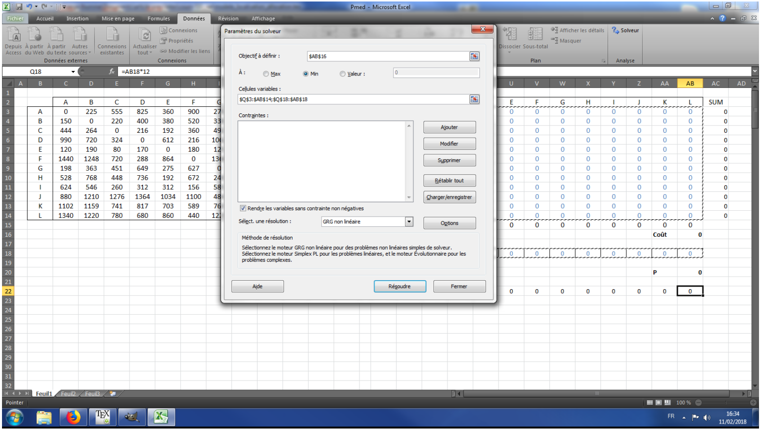
Le solveur est disponible dans l'onglet « Données ». Si ce n'est pas le cas, il faut activer le module complémentaire dans « Fichier, Option, Compléments », il suffit alors de sélectionner « Complément solveur » et de cliquer sur « Atteindre ».



Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

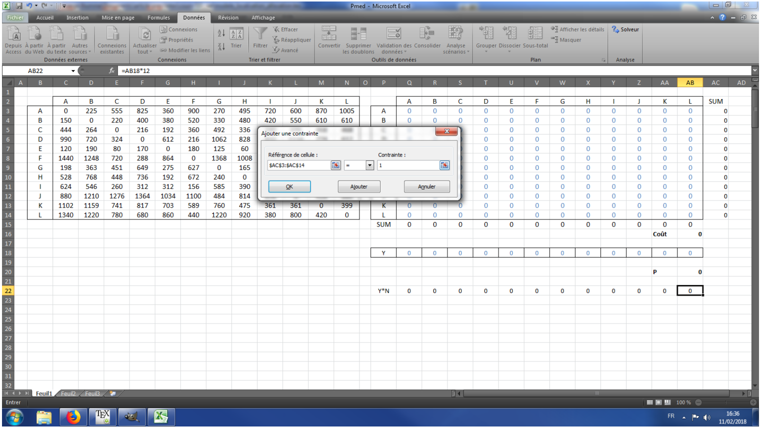
Une fois le solveur ouvert, il faut choisir la cellule calculant le coût des affectations comme « objectif à définir ». On choisit de minimiser cet objectif et on définit l'ensemble des cellules bleues comme des variables.



Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

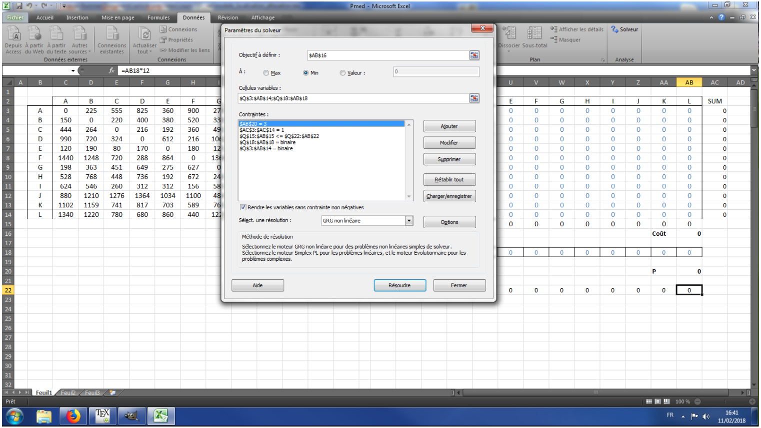
Ensuite, on ajoute les contraintes d'affectation.



Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

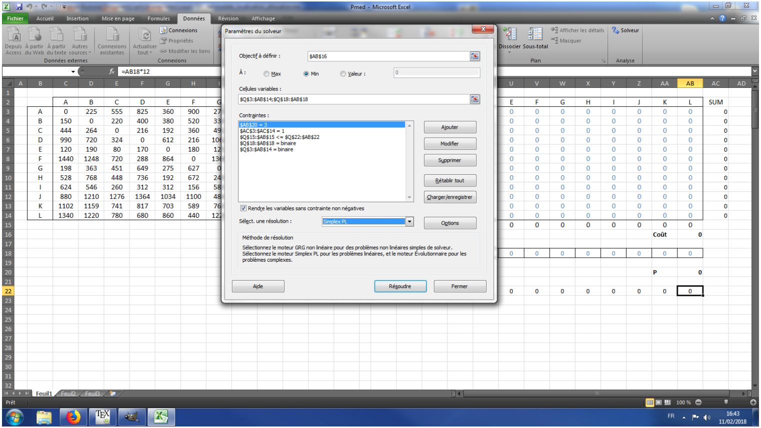
On ajoute la contrainte $P = 3$ et celles concernant les ouvertures. On n'oublie pas de préciser que les variables sont binaires.



Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

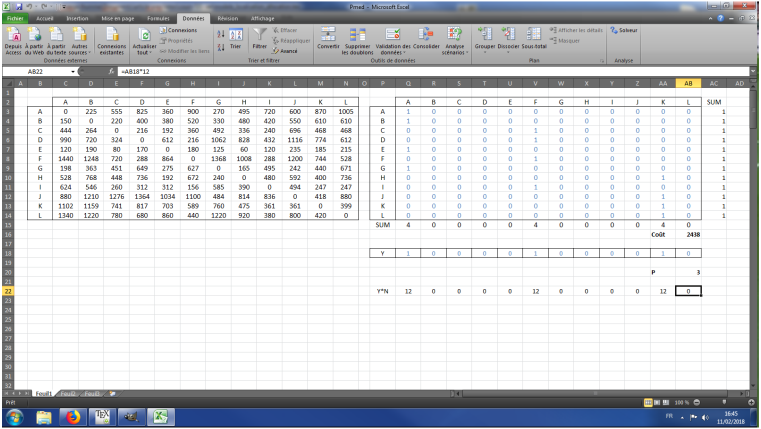
Enfin, avant de résoudre le problème, on précise que l'on souhaite utiliser l'algorithme du simplexe.



Résolution du problème p-median

Le simplexe avec Excel

Le simplexe identifie que le coût minimal (2438) est obtenu en ouvrant les sites A, F et K. Ce coût est inférieur à celui obtenu avec l'algorithme glouton (2641).



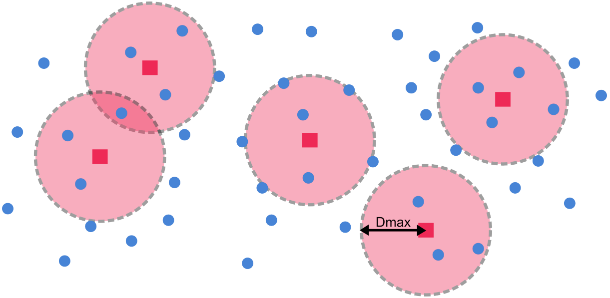
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
A	0	225	555	825	360	900	270	495	720	600	870	1005
B	150	0	220	400	380	520	330	480	420	550	610	610
C	444	264	0	216	192	360	492	336	240	696	468	468
D	990	720	324	0	612	216	1062	828	432	1116	774	612
E	120	190	80	170	0	180	125	60	120	235	185	215
F	1440	1248	720	288	864	0	1368	1008	288	1200	744	528
G	198	363	451	649	275	627	0	165	495	242	440	671
H	528	768	448	736	192	672	240	0	480	592	400	736
I	624	546	260	312	312	156	585	390	0	494	247	247
J	880	1210	1276	1364	1034	1100	484	814	836	0	418	880
K	1102	1159	741	817	703	589	760	475	361	361	0	399
L	1340	1220	780	680	860	440	1220	920	380	800	420	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	SUM
A	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
C	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
D	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
E	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
F	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
G	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
H	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
I	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
J	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
K	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
L	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
SUM	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	4	0	
											Coût	2438	
Y	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	
											P	3	
Y*N	12	0	0	0	0	12	0	0	0	0	12	0	

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture maximale (maximum coverage problem)

Le problème de couverture maximale consiste à couvrir un nombre maximal d'éléments (de clients) avec au plus k sous-ensembles (magasins) mis à disposition. Ainsi, si vous connaissez la distance maximale à partir de laquelle les clients ne viennent plus chez vous et si vous savez que vous ne pouvez ouvrir qu'un nombre bien précis de magasins, la résolution du problème de couverture maximale vous permettra de placer vos magasins de telle manière à toucher le plus de clients.



D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture maximale (maximum coverage problem)

Ce type de problème est extrêmement courant, c'est même peut-être le problème de localisation-allocation le plus courant.

Il est par exemple adapté à la localisation des casernes de pompiers, des postes de police et des centres de secours d'urgence. L'idée est d'être positionné dans des zones concentrant des enjeux dans un périmètre défini (généralement relativement restreint, car l'intervention devient moins pertinente lorsque que l'on dépasse une certaine durée). Malheureusement, tout le monde ne pourra bénéficier de ce service.

Il convient donc aussi aux entreprises voulant proposer de la livraison à domicile rapide.

Enfin, et peut-être surtout, il convient aux entreprises commerciales qui cherchent à s'implanter de telle manière à maximiser le nombre de clients situés à l'intérieur de leur zone de chalandise (dont on connait bien les limites avec peu de clients situés à plus de x minutes).

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture maximale (maximum coverage problem)

Fonction objectif : Max $\sum_{i}^{N} D_i \times Z_i$

S.C au maximum on a p sites : $\sum_{j}^{M} Y_j \leq p$

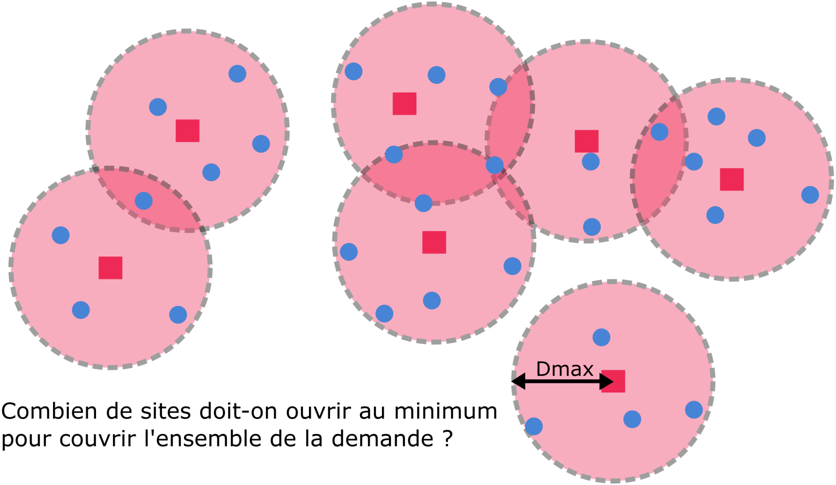
S.C un site fermé ne peut pas couvrir de clients : $Z_i \leq \sum_{j}^{M} A_{i,j} \times Y_j$

Les variables Y_j et Z_i sont binaires, $Z_i = 1$ si le lieu des clients est couvert, $Y_j = 1$ si le magasin est ouvert.

Les valeurs D_i correspondent à la demande à un point i. Les valeurs $A_{i,j}$ sont égales à 1 si $D_{i,j}$ est inférieure à la distance fixée Dmax, sinon $A_{i,j} = 0$.

D’autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture minimale (set covering problem)



Combien de sites doit-on ouvrir au minimum pour couvrir l'ensemble de la demande ?

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture minimale (set covering problem)

C'est le problème à entrée libre le plus connu. Il se révèle pertinent lorsque le coût de construction et de maintenance des ressources n'est pas un facteur limitant (on peut donc ouvrir beaucoup de sites) ou lorsque que l'on juge socialement qu'il faut se donner les moyens d'une certaine accessibilité quel qu'en soit le prix.

On cherche ainsi à bannir les « zones blanches ».

Dans le secteur public, on peut par exemple juger qu'il est intolérable qu'une personne soit située à plus de trente minutes d'une maternité. On peut alors se demander combien il faut au minimum de maternités (et où les disposer) de telle sorte à respecter strictement cette contrainte.

Dans les faits, ce problème est surtout adapté au domaine des transports (localiser des gares ou des arrêts de bus de telle sorte à ne pas marcher plus de x mètres) ou d'implantation de réseaux critiques (bornes électriques, défibrillateurs, antennes relais...).

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème de couverture minimale (set covering problem)

Fonction objectif : Min $\sum_{j}^{M} C_j \times Y_j$

S.C les clients doivent être couverts par au moins 1 site : $\sum_{j}^{M} A_{i,j} \times Y_j \geq 1$

La variable Y_j est binaire, $Y_j = 1$ si le magasin est ouvert.

Les valeurs C_J correspondent au coût de l'ouverture du site j. Les valeurs $A_{i,j}$ sont égales à 1 si $D_{i,j}$ est inférieure à la distance fixée Dmax, sinon $A_{i,j}$ $= 0$.

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème p-dispersion

Le problème p-dispersion est l'exact opposé du problème p-median, plutôt que de chercher à être le plus proche possible de la demande, on va chercher à être le plus éloigné possible de la demande.

On va maximiser (et non minimiser) la somme des distances parcourues par tous les clients vers le site qui leur est le plus proche.

Cette problématique peut convenir pour positionner des installations qui produisent de fortes nuisances : déchetteries, aéroports, industries polluantes...

Le problème p-dispersion est l'exemple type d'un problème push. Néanmoins pour trouver une localisation plus « radicale », comme pour une installation nucléaire par exemple, on pourra maximiser la distance minimale vis-à-vis de la demande (l'inverse du p-centre) ou minimiser le nombre d'usagers dans un périmètre donné (l'inverse du problème de couverture maximale).

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème p-dispersion

Fonction objectif : Max $\sum_{i}^{N}\sum_{j}^{N} X_{i,j} \times D_{i,j}$

S.C chaque client doit être affecté : $\sum_{j}^{N} X_{i,j} = 1 \ \forall i$

S.C le nombre d'installations doit être égal à P : $\sum_{j}^{N} Y_j = P$

S.C les clients ne sont affectés qu'à un site ouvert : $\sum_{i}^{N} X_{i,j} \leq Y_j \times N \ \forall j$

Les variables $X_{i,j}$ et Y_j sont binaires.

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème p-centre

Le problème p-centre cherche à minimiser la distance maximale vis-à-vis de la demande. C'est un problème pull. C'est une alternative au problème p-median. Plutôt que d'être au plus proche, on essaiera d'être au moins loin.

Le problème p-centre est vu comme plus « équitable »que le problème p-median. En effet, le problème p-median aura tendance à se rapprocher le plus possible des zones de fortes concentrations des clients.

Le problème p-centre accorde beaucoup d'importance aux éléments « périphériques », notamment lorsque l'on travaille sans tenir compte de leur taille (de leur importance).

Pour faire simple, tandis que le problème p-median s'applique presque parfaitement aux problématiques des entreprises privées, le problème p-centre pourra être plus pertinent pour le secteur public : localisation des écoles, des hôpitaux...

D'autres problèmes de localisation-allocation

Le problème p-centre

Fonction objectif : Min T

S.C chaque client doit être affecté : $\sum_{j}^{N} X_{i,j} = 1 \ \forall i$

S.C le nombre d'installations doit être égal à P : $\sum_{j}^{N} Y_j = P$

S.C les clients ne sont affectés qu'à un site ouvert : $\sum_{i}^{N} X_{i,j} \leq Y_j \times N \ \forall j$

S.C assure que la distance T soit minimale : $\sum_{j}^{N} D_{i,j} \times X_{i,j} \leq T \ \forall i$

Les variables $X_{i,j}$ et Y_j sont binaires.

D'autres problèmes de localisation-allocation

Et toujours plus...

On pourra rajouter aux problèmes déjà présentés, des contraintes de capacités. Ainsi le p-median peut conduire à créer des installations avec des allocations très déséquilibrées entre les sites (un site central devant accueillir plein d'usagers et d'autres sites périphériques en accueillant beaucoup moins).

On pourra chercher à s'implanter en tenant compte de la concurrence.

Cela impliquera de s'interroger sur la règle d'allocation simpliste consistant à affecter au plus proche (intégration du modèle gravitaire, de modèles probabilistes...).

Il sera possible de proposer de relâcher certaines contraintes.

Dans les faits, plutôt que d'utiliser et de maitriser toujours plus de modèles théoriques de plus en plus spécifiques semblant se rapprocher des problématiques réelles, il conviendra d'être en mesure de solutionner tout type de problèmes d'optimisation.